



20. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
05 - 09 Eylül 2017, Uludağ Üniversitesi, Bursa

## EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENMİŞ DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMİ

Faruk Fırat ÇALIM

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Adana

### ABSTRACT

In this study, free vibration analysis of axially functionally graded beams with variable cross-section is investigated. Both the material and geometrical properties of axially functionally graded tapered beam varying along the longitudinal direction. The influences of rotary inertia axial and shear deformation are considered in the formulation. Complementary functions method is used to solve the differential equations in Laplace domain. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature.

### ÖZET

Bu çalışmada eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin serbest titreşim analizi incelenmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin malzeme ve geometrik özellikleri kirişin eksenini boyunca değişmektedir. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınmıştır. Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlerin çözümünde tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile literatürde bulunan sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları görülmüştür.

### GİRİŞ

Son zamanlarda ağırlık, yüksek mukavemet ve ısı direncine bağlı olarak fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişler, inşaat ve makine mühendisliği alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

Hein ve Feklistova [1] Haar matrisi ve Bernoulli-Euler kiriş teorisini kullanarak değişken kesite sahip fonksiyonel derecelenmiş kirişin serbest titreşimini araştırmışlardır. Huang ve Li [2] ve Atmane ve ark. [3] eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin doğal frekanslarını çalışmışlardır. Shahba ve ark. [4,5] ve Shahba ve Rajasekaran [6] eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli Bernoulli-Euler ve Timoshenko kirişinin stabilite ve serbest titreşimini çalışmışlardır. Şimşek [7] eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli nano çubukların serbest titreşim analizini yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak araştırmıştır. Huang ve ark. [8] eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli Timoshenko kirişinin serbest titreşim analizi için yeni bir yöntem önermişlerdir. Çalım [9] değişken kesite sahip fonksiyonel derecelenmiş kirişin dinamik analizi çalışmıştır.

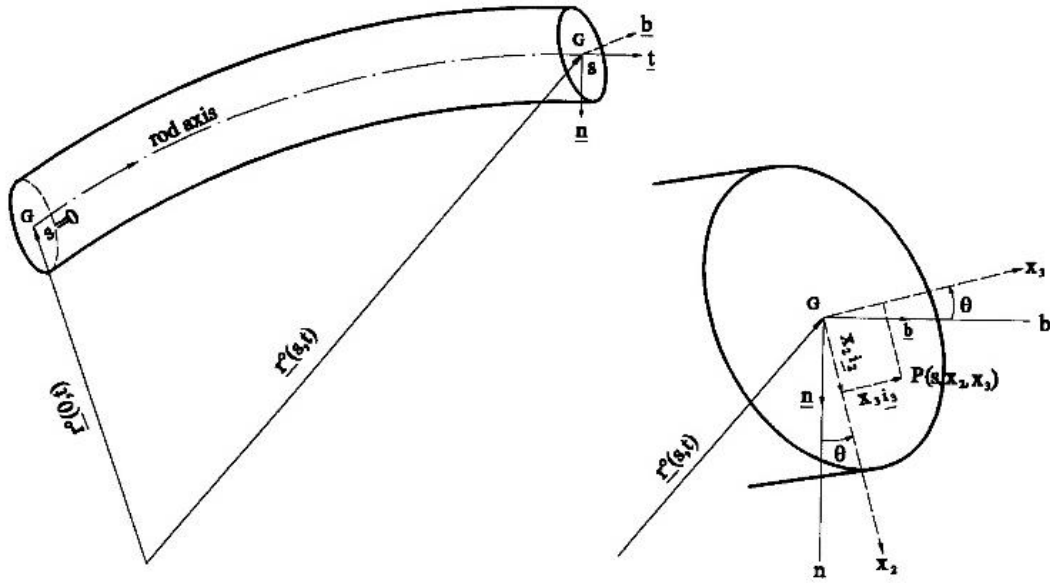
Literatürde, fonksiyonel derecelenmiş kiriş ve plaklar ile ilgili birçok çalışma bulunabilir. Bu çalışmalar genelde, fonksiyonel derecelenmiş kiriş ve plakların serbest titreşim analizi üzerinedir. Ancak, değişken kesite sahip fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin serbest titreşim analizi üzerine çalışmalar yeterli değildir. Bu çalışmada, değişken kesite sahip fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin serbest titreşim analizi yapılacaktır.

## DENKLEMLER

Çubuk ekseninde yer değiştirme  $\mathbf{U}$  ve kesitin dönmesi  $\mathbf{\Omega}$  olarak gösterilsin.  $\mathbf{T}$  iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve  $\mathbf{M}$  kuvvet çifti olarak gösterilsin (Şekil 1). Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet  $\mathbf{p}$  ve moment  $\mathbf{m}$  olsun. Uzaysal çubuğun dinamik davranışını idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

$$\mathbf{U}_{,s} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega}_{,s} - \mathbf{D}\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{T}_{,s} + \mathbf{p}^{(sx)} - \rho A \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{,s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m}^{(sx)} - \rho \mathbf{I} \ddot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0} \quad (2)$$



Şekil 1. Çubuk geometrisi

Burada,  $\mathbf{C}$  ve  $\mathbf{D}$  çubuk malzeme ve geometrik özelliklerini içeren esneklik matrisi,  $\rho$  kütleli yoğunluk,  $A$  kesit alanı ve  $\mathbf{I}$  atalet momentleridir. Kesitin ağırlık ve kayma merkezlerinin çakıştığı ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  hareketli eksen takımında aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

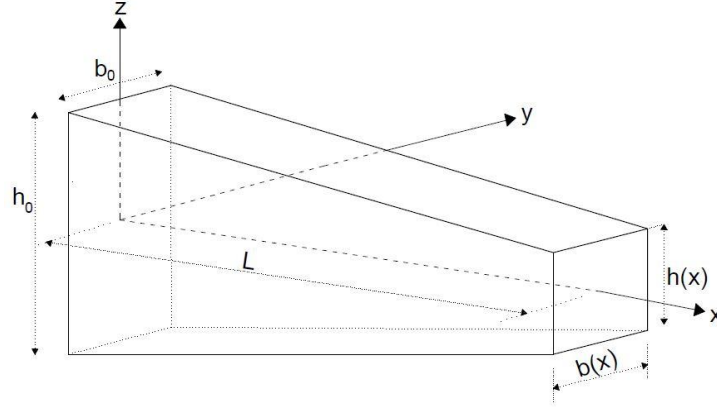
$$\begin{aligned}
\frac{dU_t}{ds} &= \chi U_n + \frac{T_t}{EA} & \frac{dT_t}{ds} &= \rho A \ddot{U}_t + \chi T_n - p_t^{(sx)} \\
\frac{dU_n}{ds} &= -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{T_n}{\kappa GA} & \frac{dT_n}{ds} &= \rho A \ddot{U}_n + \tau T_b - \chi T_t - p_n^{(sx)} \\
\frac{dU_b}{ds} &= -\tau U_n - \Omega_n + \frac{T_b}{\kappa GA} & \frac{dT_b}{ds} &= \rho A \ddot{U}_b - \tau T_n - p_b^{(sx)} \\
\frac{d\Omega_t}{ds} &= -\chi \Omega_n + \frac{M_t}{GI_t} & \frac{dM_t}{ds} &= \rho I_t \ddot{\Omega}_t + \chi M_n - m_t^{(sx)} \\
\frac{d\Omega_n}{ds} &= -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{M_n}{EI_n} & \frac{dM_n}{ds} &= \rho I_n \ddot{\Omega}_n + \tau M_b - \chi M_t + T_b - m_n^{(sx)} \\
\frac{d\Omega_b}{ds} &= -\tau \Omega_n + \frac{M_b}{EI_b} & \frac{dM_b}{ds} &= \rho I_b \ddot{\Omega}_b - \tau M_n - T_n - m_b^{(sx)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Burada,  $\chi$  ve  $\tau$  eksen eğriliği ve tabii burulması,  $E$  ve  $G$  elastik sabitler,  $\kappa$  kayma düzeltme faktörleridir.

(3) nolu denklemlerde, eğrilik ve tabii burulma ( $\chi = \tau = 0$ ) sıfır alınarak doğru eksenli çubukları idare eden diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Ayrıca, doğru eksenli bir çubukta, yay elemanı olmadığından  $ds = dx$  olarak ifade edilmektedir (Şekil 1). Sonuç olarak, Laplace uzayında, değişken kesite sahip eksenel fonksiyonel derecelenmiş çubuğun dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler aşağıda sunulmuştur (Şekil 2).

$$\begin{aligned}
\frac{dU_x}{dx} &= \frac{T_x}{E(x)A(x)} & \frac{d\bar{T}_x}{dx} &= \rho(x)A(x)z^2\bar{U}_x - \bar{p}_x \\
\frac{dU_y}{dx} &= \bar{\Omega}_z + \frac{T_y}{\kappa G(x)A(x)} & \frac{d\bar{T}_y}{dx} &= \rho(x)A(x)z^2\bar{U}_y - \bar{p}_y \\
\frac{dU_z}{dx} &= -\bar{\Omega}_y + \frac{T_z}{\kappa G(x)A(x)} & \frac{d\bar{T}_z}{dx} &= \rho(x)A(x)z^2\bar{U}_z - \bar{p}_z \\
\frac{d\bar{\Omega}_x}{dx} &= \frac{M_x}{E(x)I_x(x)} & \frac{d\bar{M}_x}{dx} &= \rho(x)I_x(x)z^2\bar{\Omega}_x - \bar{m}_x \\
\frac{d\bar{\Omega}_y}{dx} &= \frac{M_y}{E(x)I_y(x)} & \frac{d\bar{M}_y}{dx} &= \rho(x)I_y(x)z^2\bar{\Omega}_y + \bar{T}_z - \bar{m}_y \\
\frac{d\bar{\Omega}_z}{dx} &= \frac{M_z}{E(x)I_z(x)} & \frac{d\bar{M}_z}{dx} &= \rho(x)I_z(x)z^2\bar{\Omega}_z - \bar{T}_y - \bar{m}_z
\end{aligned} \tag{4}$$

Burada,  $\kappa$  ve  $z$  kayma düzeltme faktör ve Laplace parametresidir.



Şekil 2. Değişken kesitli kiriş geometrisi

## TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ

Değişken katsayılı 12 adet diferansiyel denklem (4) eşitliklerinde verilmiştir. Bu denklemlerin her biri yere göre birinci mertbe türevleri içermektedir. (4) denklemleri matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d \bar{\mathbf{Y}}(x, z)}{dx} = \bar{\mathbf{F}}(x, z) \bar{\mathbf{Y}}(x, z) + \bar{\mathbf{B}}(x, z) \quad (5)$$

Uzaysal çubuklar için, durum vektörünün elemanları (6) ifadesinde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{Y}(x, z) = \{\mathbf{U}(x, z), \mathbf{\Omega}(x, z), \mathbf{T}(x, z), \mathbf{M}(x, z)\}^T \quad (6)$$

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, başlangıç şartları yardımı ile (5) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. (5) denkleminin genel çözümü

$$\bar{\mathbf{Y}}(x, z) = \sum_{m=1}^{12} C_m (\bar{\mathbf{U}}^{(m)}(x, z)) + \bar{\mathbf{V}}(x, z) \quad (7)$$

şeklindedir.  $\bar{\mathbf{U}}^{(m)}(x, z)$   $m$ 'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür.  $\bar{\mathbf{V}}(x, z)$  ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada  $C_m$  integrasyon sabitleri sınır şartlarından elde edilmektedir.

## SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, değişken kesite sahip eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişin serbest titreşim analizini yapan Fortran dilinde genel amaçlı bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Runga-Kutta algoritması uygulanmıştır.

Problemin serbest titreşim frekansları, dış yükler kaldırıp ( $p_i^{(ex)} = 0$  ve  $m_i^{(ex)} = 0$ ) Laplace parametresi “ $z$ ” yerine “ $i\omega$ ” konularak hesaplanmaktadır. Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan “ $\omega$ ” değerleri problemin serbest titreşim frekanslarıdır.

Bu bölümde hazırlanan bilgisayar programı ile çeşitli örnekler ele alınmıştır. Değişken kesite sahip eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişin serbest titreşimini etkileyen faktörler incelenmiştir. Sınır şartları, kesit değişim parametresi, malzeme değişim parametresinin serbest titreşime etkileri araştırılmıştır. Sınır şartları, ankastre uç-ankastre uç (AA), ankastre uç-sabit uç (AS), ankastre uç-boş uç (AB), sabit uç-sabit uç (SS) ve boş uç-boş uç (BB) olarak ele alınmaktadır.

Değişken kesitli kirişin kesit alanı ( $A$ ) ve atalet momenti ( $I$ ) ile ilgili fonksiyon değişimi aşağıdaki ifade yardımı ile yapılmaktadır.

$$A = A_o \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right) \quad , \quad I = I_o \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right)^3 \quad (8)$$

Burada,  $\beta$  kesit değişim parametresidir.

Kirişin geometrik özellikleri: narinlik oranı  $L / h_o = 2.887$ , kesit genişliği  $b_o = 0.5$  m, kesit yüksekliği  $h_o = 1$  m. Homojen kirişe ait malzeme özellikleri ise: elastisite modülü  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, kütleli yoğunluk  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , kayma düzeltme faktörü  $\kappa = 5/6$  olarak alınmıştır.

Eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişin, eksen boyunda kuvvet bağıntısı olarak değişen malzeme özelliği dikkate alınmıştır.

$$P(x) = P_o + (P_1 - P_o)(x/L)^n \quad (9)$$

Burada,  $n$  malzeme değişim parametresini,  $P$  genel malzeme özelliğini ( $\rho$ ,  $E$  ve  $G$ ),  $P_o$  ve  $P_1$  kirişin sol kenar ile sağ kenardaki malzeme özelliklerini göstermektedir.

Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kiriş, zirkonyum ve alüminyumdan üretilmiştir. Bu seçilen malzemelerin özellikleri: Zirkonyum ( $ZrO_2$ ):  $\rho_o = 5700$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_o = 200$  GPa; Alüminyum (Al):  $\rho_1 = 2702$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_1 = 70$  GPa.

Hesaplanan doğal frekanslar aşağıdaki ifade yardımı ile boyutsuz hale dönüştürülmektedir.

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho_o A_o / E_o I_o} \quad (10)$$

### Değişken Kesitli Homojen Kirişin Serbest Titreşimi

Farklı sınır şartlarına sahip değişken kesitli homojen kiriş problemi ele alınmıştır. Kirişe ait boyutsuz halde temel frekans değerleri Çizelge 1'de verilmektedir. İlgili çizelge incelendiğinde, farklı yöntemlerle çözülen boyutsuz haldeki temel frekansların birbirleri ile uyumlu oldukları görülmektedir.

Çizelge 1. Değişken kesitli homojen kirişe ait boyutsuz temel frekansları ( $\beta = 0.2$ )

Sınır şartları	Diğer sonuçlar			Bu çalışma
	[4]	[8]	[10]	
AB	3.33	3.33	3.33	3.33
AS	-	-	10.69	10.69
AA	-	13.22	13.22	13.22
BB	-	-	15.72	15.73

### Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş Değişken Kesitli Kirişin Serbest Titreşimi

Farklı sınır şartlarına sahip eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin serbest titreşim analizi incelenmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin boyutsuz haldeki temel frekansları Çizelge 2 ve 3’de verilmiştir. Çizelge 2’de, malzeme değişim parametresinin Çizelge 3’de ise kesit değişim parametresinin serbest titreşim frekansına etkisi araştırılmıştır. Çizelge 2 ve 3 incelendiğinde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları gözlemlenmiştir.

Çizelge 2. Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin boyutsuz temel frekansları ( $\beta = 0.1$ )

$n$	Sınır şartları	Diğer sonuçlar		Bu çalışma
		[4]	[8]	
1	AB	-	3.95	3.94
	SS	-	-	7.51
	AS	-	10.89	10.88
	AA	-	12.68	12.68
2	AB	3.94	3.94	3.94
	SS	7.66	-	7.65
	AS	-	10.80	10.80
	AA	12.47	12.46	12.46

Çizelge 3. Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişin boyutsuz temel frekansları ( $n = 2$ )

Sınır şartları		$\beta$				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
AB	[4]	3.94	4.06	4.24	4.51	5.04
	Bu çalışma	3.94	4.06	4.24	4.51	5.03
SS	[4]	7.66	6.90	5.99	4.85	3.20
	Bu çalışma	7.65	6.89	5.98	4.84	3.18
AA	[4]	12.47	11.92	11.17	10.10	8.36
	Bu çalışma	12.46	11.91	11.16	10.09	8.32

Bilindiği üzere, mesnet koşulları temel frekans değerlerini ciddi bir şekilde etkilemektedir. Sınır şartlarına bağlı olarak, malzeme değişim parametresinin artması temel frekans

değerlerini çok fazla etkilememektedir. Ancak, kesit değişim parametresinin artması temel frekans değerlerini oldukça etkilemektedir.

### SONUÇLAR

Eksenel fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli kirişlerin serbest titreşimleri teorik olarak araştırılmıştır. Homojen ve eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin serbest titreşim analizi için çeşitli örnekler incelenmiştir. Bu çalışmada önerilen yöntem ve literatürde farklı yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Farklı sınır şartları, malzeme ve kesit değişim parametresi serbest titreşim frekanslarını etkilemektedir. Malzeme değişim parametresinin artması, temel frekanslar farklı sınır koşullarında farklı eğilim göstermektedir. Bütün sınır şartlarında, malzeme değişim parametresi temel frekans değerlerini çok az etkilemektedir.

### TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Adana Bilim ve Teknoloji Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 17103021 nolu proje kapsamında desteklenmektedir.

### KAYNAKLAR

- [1] H. Hein, L. Feklistova, Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3696-3701. doi:10.1016/j.engstruct.2011.08.006
- [2] Y. Huang, X.F. Li, A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 329 (2010) 2291-2303. doi:10.1016/j.jsv.2009.12.029
- [3] H.A. Atmane, A. Tounsi, S.A. Meftah, H.A. Belhadj, Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section, *Journal of Vibration and Control*, 17-2 (2011) 311-318. doi:10.1177/1077546310370691
- [4] A. Shahba, R. Atternejad, M.M. Tavanaie, S. Hajilar, Free vibration of stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions, *Composites Part B: Engineering*, 42 (2011) 801-808. doi:10.1016/j.compositesb.2011.01.017
- [5] A. Shahba, R. Atternejad, S. Hajilar, A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams, *Mechanical Advances and Material Structures*, 20 (2013) 696-707. doi: 10.1080/15376494.2011.640971
- [6] A. Shahba, S. Rajasekaran, Free vibration of stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (2012) 3094-3111. doi:10.1016/j.apm.2011.09.073
- [7] M. Şimşek, Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods, *Computational Material Sciences*, 61 (2012) 257-265. doi:10.1016/j.commatsci.2012.04.001
- [8] Y. Huang, L.E. Yang, Q.Z. Luo, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, *Composites Part B:Engineering*, 45 (2013) 1493-1498. doi:10.1016/j.compositesb.2012.09.015

- [9] F.F. Çalım, Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section, *Composites Part B:Engineering*, 98 (2016) 472-483. doi:10.1016/j.compositesb.2016.05.040
- [10] A.Y.T. Leung, W.E. Zhou, C.W. Lim, R.K.K. Yuen, U. Lee, Dynamic stiffness for peicewise non-uniform Timoshenko column by power series-Part I: Conservative axial force, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 51 (2001) 505-529. doi:10.1002/nme.159